Zur Summation der Fourierschen Reihe.

Von G. Szegő in Königsberg.

Die Summation der Fourierschen Reihe mit Hilfe von Cesàroschen Mitteln beliebiger positiver Ordnung ist vor einiger Zeit von Herrn M. Riesz auf eine sehr einfache Form gebracht worden.[1]) Wie Herr Fejér kürzlich[2]) besonders deutlich hervorgehoben hat, spielt bei dieser Frage sowie auch bei anderen verwandten, eine gewisse einfache Eigenschaft der Partialsummen der Binomialreihe eine Hauptrolle, eine Eigenschaft, die im wesentlichen auf die Herren S. Chapman und M. Riesz zurückgeht.[3])

In der neueren Zeit hat man bei der Fourierschen Reihe auch die Cesàroschen Mittel k-ter Ordnung mit negativem k, $k > -1$, untersucht und auf diese Weise manche klassischen Konvergenzsätze verschärft.[4]) Diesen Untersuchungen liegt hauptsächlich ein Satz des Herrn E. Kogbetliantz[5]) zu Grunde, den man folgendermassen formulieren kann:

Es sei $-1 < k < 1$, $k \neq 0$ *und*

$$C_n^{(k)} = \frac{(k+1)(k+2)\dots(k+n)}{n!} = \binom{n+k}{n}. \tag{1}$$

---

1) Sur la sommation des séries de Fourier, diese Zeitschrift 1 (1923), S. 104—113.

2) Abschätzungen für die Legendreschen und verwandten Polynome, Math. Zeitschr. 24 (1925), S. 285—298.

3) Bezüglich eines einfachen Beweises vgl. G. Szegő, Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Fejér über die Legendreschen Polynome, Math. Zeitschr 25 (1926), S. 172—187.

4) E. Kogbetliantz, Analogie entre les séries trigonométriques et les séries sphériques au point de vue de leur sommabilité par les moyennes arithmétiques, Ann. de l'Éc. Norm. Sup. (3) 40 (1923), S. 259—323; vgl. insbesondere S. 266—280. — A. Zygmund, Sur la sommabilité des séries de Fourier des fonctions vérifiant la condition de Lipschitz, Bull. de l'Acad. Polonaise des Sciences et des Lettres, Series A: Sciences mathématiques 1925.

5) Vgl. a. a. O. S. 276—277.

Dann sind die CESÀROschen *Mittel k-ter Ordnung der Reihe*

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx+\ldots \tag{2}$$

in der folgenden Form darstellbar:

$$\frac{s_n^{(k)}(x)}{C_n^{(k)}}=\frac{1}{2}+ \tag{3}$$
$$+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{C_{n-\nu}^{(k)}}{C_n^{(k)}}\cos\nu x=\frac{\cos\left[\left(n+\frac{k+1}{2}\right)x-\frac{k+1}{2}\pi\right]}{C_n^{(k)}\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{k+1}}+r_n^{(k)}(x),$$

wobei für $0<x<2\pi$ *das Restglied* $r_n^{(k)}(x)$ *wie folgt abzuschätzen ist:*

$$|r_n^{(k)}(x)|\leqq\frac{|k|}{(n+1)\sin^2\frac{x}{2}}. \tag{4}$$

Herr KOGBETLIANTZ beweist diese Abschätzung mit Hilfe des CAUCHYschen Integralsatzes. Im Hinblick auf die Bedeutung und auf den elementaren Charakter dieses Resultates scheint es mir jedoch nicht ohne Interesse zu sein, eine elementare Begründung desselben zu geben. Dies soll im folgenden geschehen. Der hier darzulegende Beweis operiert mit ähnlichen einfachen Kunstgriffen, wie der a. a. O. [3]) für den S. CHAPMAN—M. RIESZschen Hilfssatz gegebene und liefert für das Restglied $r_n^{(k)}(x)$ sogar eine etwas genauere Abschätzung wie (4). Diese Abschätzung beruht auf einer eigenartigen Darstellung des Restgliedes, aus der sich auch manche anderen Schlüsse ziehen lassen.

* * *

Wir beweisen den folgenden Satz:

Es sei $-1<k<1$, $k\neq 0$, *n positiv ganz. Für* $0<x<2\pi$ *gilt dann die folgende Darstellung des n-ten* CESÀROschen *Mittels k-ter Ordnung der Reihe* (2):

$$\frac{s_n^{(k)}(x)}{C_n^{(k)}}=\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{C_{n-\nu}^{(k)}}{C_n^{(k)}}\cos\nu x=\frac{\cos\left[\left(n+\frac{k+1}{2}\right)x-\frac{k+1}{2}\pi\right]}{C_n^{(k)}\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{k+1}} \tag{5}$$
$$+\frac{k}{2(n+1)}\left\{p_{1n}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2+p_{2n}\left(\frac{\sin 2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2+\ldots+p_{\mu n}\left(\frac{\sin\mu\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2+\ldots\right\},$$

wo die Konstanten $p_{\mu n}$ (ausser von μ und n) nur von k abhängen und die Beziehungen

(6) $$p_{1n} > 0,\; p_{2n} > 0, \ldots, p_{\mu n} > 0, \ldots,$$

(7) $$p_{1n} + p_{2n} + \ldots + p_{\mu n} + \ldots = 1$$

erfüllen.

Bevor ich auf den Beweis dieses Satzes komme, bemerke ich, dass daraus (4) unmittelbar folgt. Es folgt sogar etwas schärfer

(8) $$0 < \frac{t_n^{(k)}(x)}{k} < \frac{1}{2(n+1)\sin^2\frac{x}{2}} \qquad (0 < x < 2\pi).$$

Die Darstellung (5) kann aber sehr leicht bewiesen werden. Wir setzen bei festem k

$$C_0^{(k)} + C_1^{(k)} z + \ldots + C_n^{(k)} z^n = s_n(z),$$

so dass

(9) $$\begin{aligned} s_n^{(k)}(x) &= \frac{C_n^{(k)}}{2} + C_{n-1}^{(k)} \cos x + \ldots + C_0^{(k)} \cos nx \\ &= \Re\, e^{inx} \frac{s_n(e^{-ix}) + s_{n-1}(e^{-ix})}{2}. \end{aligned}$$

Wir schreiben ferner

(10) $$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} - s_n(z) = \frac{r_n(z)}{(1-z)^2},$$

wo also die Entwicklung von $r_n(z)$ die Form hat:

(11) $$r_n(z) = a_{n+1}^{(n)} z^{n+1} + a_{n+2}^{(n)} z^{n+2} + \ldots$$

Es ist dann

(10′) $$r_n(z) = (1-z)^{1-k} - (1-z)^2 s_n(z).$$

Aus der letzten Darstellung von $r_n(z)$ folgt, dass die Potenzreihe (11) (schon unter der Voraussetzung $k < 1$) auf dem Einheitskreise absolut konvergiert.

Nun erhält man aus (9), da $(1 - e^{-ix})^2 = -e^{-ix}\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2$ ist,

(12) $$\begin{aligned} s_n^{(k)}(x) &= \Re \frac{e^{inx}}{(1-e^{-ix})^{k+1}} + \\ &+ \frac{1}{8\sin^2\frac{x}{2}} \Re\, e^{i(n+1)x} \left[r_n(e^{-ix}) + r_{n-1}(e^{-ix})\right] \\ &= \frac{\cos\left[\left(n + \frac{k+1}{2}\right)x - \frac{k+1}{2}\pi\right]}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{k+1}} + \frac{\varrho_n(x)}{8\sin^2\frac{x}{2}}, \end{aligned}$$

wo $\varrho_n(x)$ eine wohlbestimmte Kosinusreihe ist, für die wegen (11) die folgende Darstellung gilt:

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
\varrho_n(x) &= \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu^{(n)} \cos(\nu-n-1)x + \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu^{(n-1)} \cos(\nu-n-1)x \\
&= \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu^{(n)} \cos \mu x;
\end{aligned}
$$

hierbei ist

$$
(14)\qquad
\begin{aligned}
&b_0^{(n)} = a_{n+1}^{(n)} + a_{n+1}^{(n-1)}, \quad b_1^{(n)} = a_{n+2}^{(n)} + a_n^{(n-1)} + a_{n+2}^{(n-1)}, \\
&b_\mu^{(n)} = a_{n+\mu+1}^{(n)} + a_{n+\mu+1}^{(n-1)} \qquad (\mu = 2, 3, 4, \ldots).
\end{aligned}
$$

Aus (12) folgt nach Multiplikation mit $\sin^2\frac{x}{2}$ für $x \to 0$, dass $\lim\limits_{x\to 0} \varrho_n(x) = \varrho_n(0) = 0$, d. h.

$$
(15)\qquad \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu^{(n)} = 0,
$$

so dass

$$
(16)\qquad \varrho_n(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu^{(n)} (\cos \mu x - 1) = -2 \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu^{(n)} \sin^2 \mu \frac{x}{2}.
$$

Das Vorzeichen der $b_\mu^{(n)}$ kann leicht übersehen werden. Zu diesem Zwecke berechnen wir zuerst $b_0^{(n)}$ und $b_1^{(n)}$. Es ist nach (10)

$$
r_n(z) = (1-z)^2 (C_{n+1}^{(k)} z^{n+1} + C_{n+2}^{(k)} z^{n+2} + \ldots),
$$

so dass

$$
a_{n+1}^{(n)} = C_{n+1}^{(k)}, \quad a_{n+2}^{(n)} = C_{n+2}^{(k)} - 2\, C_{n+1}^{(k)}
$$

Man hat also

$$
(17)\qquad b_0^{(n)} = 2\,(C_{n+1}^{(k)} - C_n^{(k)}) = \frac{2k}{n+1} C_n^{(k)}
$$

und

$$
(18)\qquad b_1^{(n)} = C_{n+2}^{(k)} - 2\, C_{n+1}^{(k)} + C_n^{(k)} + a_{n+2}^{(n-1)} = \frac{k\,(k-1)}{(n+1)(n+2)} C_n^{(k)} + a_{n+2}^{(n-1)}.
$$

Die Koffizienten der Entwicklung von $(1-z)^{1-k}$ sind nun vom zweiten bzw. dritten Gliede an sämtlich negativ bzw. positiv, je nachdem $0 < k < 1$ oder $-1 < k < 0$ ist. Hieraus schliessen wir, dass

$$
a_{n+3}^{(n)},\ a_{n+4}^{(n)},\ a_{n+5}^{(n)}, \ldots
$$

sämtlich das entgegengesetzte Vorzeichen wie k haben. Es gilt somit für $0 < k < 1$

$$
(19)\qquad b_0^{(n)} > 0, \quad b_1^{(n)} < 0, \quad b_2^{(n)} < 0, \quad b_3^{(n)} < 0, \ldots
$$

und für $-1 < k < 0$

$$
(20)\qquad b_0^{(n)} < 0, \quad b_1^{(n)} > 0, \quad b_2^{(n)} > 0, \quad b_3^{(n)} > 0, \ldots
$$

Wegen (12) und (16) hat man nun

$$i_n^{(k)}(x) = -\frac{1}{4\,C_n^{(k)}}\sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu^{(n)}\left(\frac{\sin\mu\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$$

Hierbei ist

$$-\sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu^{(n)} = b_0^{(n)} = \frac{2k}{n+1}\,C_n^{(k)},$$

so dass

$$-\frac{b_\mu^{(n)}}{4\,C_n^{(k)}} = \frac{k}{2(n+1)}\,p_{\mu n} \tag{21}$$

gesetzt, die Behauptung folgt.

Für $-1 < k < 0$ ist das Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\left[\left(n+\frac{k+1}{2}\right)x-\frac{k+1}{2}\pi\right]}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{k+1}}\,dx$$

konvergent (jedoch nicht für $0 < k < 1$), so dass dann durch Integration von (5) die Gleichung

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\left[\left(n+\frac{k+1}{2}\right)x-\frac{k+1}{2}\pi\right]}{C_n^{(k)}\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{k+1}}\,dx + \frac{k}{2(n+1)}\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu\,p_{\mu n} \tag{22}$$

entsteht, wobei gleichzeitig die Konvergenz der zuletzt angeschriebenen Reihe erkannt wird. Es gilt folglich

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu\,p_{\mu n} = O(n). \tag{23}$$

* * *

Wir betrachten das n-te Cesàrosche Mittel k-ter Ordnung der Reihe

$$\frac{x}{2} + \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} + \ldots, \tag{24}$$

d. h. den Ausdruck

$$\frac{S_n^{(k)}(x)}{C_n^{(k)}} = \frac{x}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{C_{n-\nu}^{(k)}}{C_n^{(k)}}\frac{\sin\nu x}{\nu} = \frac{\pi}{2} - \int_x^{\pi}\frac{s_n^{(k)}(t)}{C_n^{(k)}}\,dt \tag{25}$$

$$= \int_0^{x}\frac{s_n^{(k)}(t)}{C_n^{(k)}}\,dt.$$

Herr KOGBETLIANTZ beweist a. a. O. [4]) (S. 268–273), dass für $-1<k<0$

$$\text{I.}\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{S_n^{(k)}(x)}{C_n^{(k)}}=\frac{\pi}{2},$$

u. zw. gleichmässig in x, wenn x in einem festen Intervall im Innern von $[0, 2\pi]$ gelegen ist;

$$\text{II.}\qquad \left|\frac{S_n^{(k)}(x)}{C_n^{(k)}}\right|<S^{(k)}, \qquad (n=1,2,3,\ldots;\ 0\leq x\leq 2\pi)$$

wo die positive Zahl $S^{(k)}$ von n und x unabhängig ist (sie hängt nur von k ab).

I. folgt offenbar aus (4) mit Beachtung von (25). Dagegen scheint II. aus (4) nicht zu folgen. Herr KOGBETLIANTZ schickt zum Beweise von II. eine Diskussion der Summen (25) voraus, die ebenfalls auf dem CAUCHYschen Integralsatze beruht. Wir zeigen, dass auch II. aus unserem Hauptsatz leicht hergeleitet werden kann.

Es ist für $0\leq x\leq\pi$

$$\left|\frac{S_n^{(k)}(x)}{C_n^{(k)}}\right|\leq$$

$$\left|\int_0^x\frac{\cos\left[\left(n+\frac{k+1}{2}\right)t-\frac{k+1}{2}\pi\right]}{C_n^{(k)}\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{k+1}}dt\right|+\frac{|k|\pi}{2(n+1)}\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu p_{\mu n}$$

Die Funktion
$$\frac{1}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{k+1}}-\frac{1}{t^{k+1}}$$

ist nun im Intervall $0<t\leq\pi$ samt ihrer ersten Ableitung beschränkt, so dass

$$\left|\int_0^x\cos\left[\left(n+\frac{k+1}{2}\right)t-\frac{k+1}{2}\pi\right]\left(\frac{1}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{k+1}}-\frac{1}{t^{k+1}}\right)dt\right|<\frac{A}{n},$$

wo A (wie auch weiter unten B und C) positiv ist und nur von k abhängt. Wir haben folglich wegen (23)

$$\left|\frac{S_n^{(k)}(x)}{C_n^{(k)}}\right|<+B\frac{C}{\left(n+\frac{k+1}{2}\right)^k}\left|\int_0^x\frac{\cos\left[\left(n+\frac{k+1}{2}\right)t-\frac{k+1}{2}\pi\right]}{t^{k+1}}dt\right|=$$

$$=B+C\left|\int_0^{\left(n+\frac{k+1}{2}\right)x}\frac{\cos\left(t-\frac{k+1}{2}\pi\right)}{t^{k+1}}dt\right|$$

Da das Integral
$$\int_0^\infty \frac{\cos\left(t-\frac{k+1}{2}\pi\right)}{t^{k+1}}\,dt$$
konvergiert, ist damit die Behauptung bewiesen.

* * *

Es sei $f(x)$ eine nach 2π periodische, im Lebesgueschen Sinne integrable Funktion, die für $x=0$ stetig ist; es sei der Einfachheit halber $f(0)=0$. Man kann nach weiteren Bedingungen fragen, welche zur Folge haben, dass die Fouriersche Reihe von $f(x)$ an der Stelle $x=0$ mit den Cesàroschen Mitteln k-ter Ordnung, $-1<k<0$, summabel ist.

Aus (5) folgt für $-1<k<0$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\frac{s_n^{(k)}(x)}{C_n^{(k)}}\,dx= \tag{26}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\frac{\cos\left[\left(n+\frac{k+1}{2}\right)x-\frac{k+1}{2}\pi\right]}{x^{k+1}}\,dx+\frac{k}{2(n+1)}\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu\,p_{\mu n}\,\sigma_\mu,$$

wobei

$$\frac{1}{\mu\pi}\int_0^\pi f(x)\left(\frac{\sin\mu\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 dx=\sigma_\mu \tag{27}$$

gesetzt worden ist.

Wir wissen, dass $\lim\limits_{\mu\to\infty}\sigma_\mu=0$ ist. Zu einer positiven Zahl ε kann also die positive ganze Zahl $M=M(\varepsilon)$ so bestimmt werden, dass für $\mu>M$
$$|\sigma_\mu|<\varepsilon$$
gilt. Es ist ferner $|\sigma_\mu|<\sigma$ für alle μ, wo σ von μ nicht abhängt. Wir haben folglich mit Beachtung von (7) und (23)

$$\frac{|k|}{2(n+1)}\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu\,p_{\mu n}|\sigma_\mu|<$$
$$<\frac{|k|}{2(n+1)}\left(\sigma\sum_{\mu=1}^{M}\mu p_{\mu n}+\varepsilon\sum_{\mu=M+1}^{\infty}\mu p_{\mu n}\right)<\frac{|k|}{2(n+1)}\,\sigma M+\varepsilon K,$$

wo $K>0$ nur von k abhängt. Hieraus folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k}{2(n+1)}\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu\,p_{\mu n}\,\sigma_\mu=0, \tag{28}$$

folglich

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\frac{s_n^{(k)}(x)}{C_n^{(k)}}dx-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\frac{\cos\left[\left(n+\frac{k+1}{2}\right)x-\frac{k+1}{2}\pi\right]}{C_n^{(k)}\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{k+1}}dx\right)=0. \tag{29}$$

Im zweiten Gliede kann $C_n^{(k)}$ durch

$$\frac{n^k}{\Gamma(k+1)}$$

ersetzt werden, da doch der Fehler

$$=O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)\int_0^\pi\frac{|f(x)|}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{k+1}}dx=o(1)$$

ist.

Wir erhalten somit:

Es sei $f(x)$ eine nach 2π periodische und im Lebesgue*schen Sinne integrable Funktion. Es sei ferner $-1<k<0$. Man setze endlich*

$$\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2}-f(x_0)=\varphi(x)$$

und es sei

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=0.$$

Die Fourier*sche Reihe von $f(x)$ ist an der Stelle $x=x_0$ dann und nur dann mit den* Cesàro*schen Mitteln k-ter Ordnung summabel, wenn*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}\int_0^\pi\varphi(x)\frac{\cos\left[\left(n+\frac{k+1}{2}\right)x-\frac{k+1}{2}\pi\right]}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{k+1}}dx=0$$

ist.

Berlin, Mai 1926.

(*Eingegangen am 15. Juni 1926.*)